Formule de Stirling

Partie I : *« Au commencement… » (exercice chapitre « Intégration »)*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$

1) Montrer que la suite (I_n) est bornée et décroissante.
2) En déduire sa convergence.
3) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$
4) Calculer I_0 et I_1.
5) A l'aide d'une I.P.P., montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
6) En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2^{2p}}{2p+1} \times \frac{1}{\binom{2p}{p}}$$

7) En utilisant les questions **Q3** et **Q5**, montrer que : $0 < \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.
8) En déduire que : $I_{n+1} \sim I_n$.
9) En utilisant les questions **Q6**, montrer que :
   a) $\forall p \in \mathbb{N}, (2p) I_{2p} I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{\pi}{2}$
   b) $\forall p \in \mathbb{N}, (2p+1) I_{2p+1} I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{\pi}{2}$
   c) En déduire des questions **Q9a** et **Q9b** que : $(n) I_n I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \times \frac{\pi}{2}$
10) En utilisant **Q8** et **Q9c**, en déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\ I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Partie II : *« La loi…des séries » (exercice chapitre « Série numérique »)*

Soient $u_n = \dfrac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

11) Montrer que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \frac{1}{12n^2}$ et en déduire la nature de la série.
12) En remarquant que : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, en déduire que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
13) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif (on le notera $1/C$).
14) En déduire que : $n! \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$

Partie III : *« Ne pas rester sur sa ~~fin~~ faim »*

15) En utilisant **Q10**, justifier que : $\sqrt{2n}\, I_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
16) En utilisant **Q6**, en déduire que : $\frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \sqrt{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}$
17) En utilisant **Q14**, justifier que : $(2n)! \sim C (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}$
18) En utilisant **Q14**, **Q16** et **Q17**, en déduire que : $C \sim \sqrt{2\pi}$

On obtient ainsi la **formule de Stirling** (magnifique formule où produit d'entiers côtoient π et e) :

$$\boldsymbol{n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\, \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Minute culture :

Et le développement asymptotique de $n!$ en $+\infty$ (question hors de notre portée) ? Voilà quelques termes…

$$\boldsymbol{n! \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2\pi\, n}\, \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$